PART2 三角関数・指数関数の不定積分

要点整理と公式

要点 ① 三角関数の不定積分

$(\sin x)' =$ 　　　　　$(\cos x)' =$

$(\tan x)' =$ 　　　　　$\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

であるから，次の公式が得られる。

三角関数の不定積分

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

(ex) $\displaystyle\int (3\sin x + 4\cos x) dx =$ 　　　 $+$ 　　　 $+ C$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} dx = \int \left(2 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = 2x - \qquad + C$$

要点 ② 指数関数の不定積分

$(e^x)' =$ 　　　　　$(a^x)' =$

であるから，次の公式が得られる。

指数関数の不定積分

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

(ex) $\displaystyle\int (e^x + 3^x) dx =$ 　 $+$ 　　 $+ C$

[MEMO]

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(1-\tan x)\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\tan^2 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\tan^2 x}dx$　　(4) $\displaystyle\int(5e^x-2^x\log 2)dx$

Point Pickup

三角・指数関数の不定積分

$\displaystyle\int\sin x\,dx=-\cos x+C$　　$\displaystyle\int\cos x\,dx=\sin x+C$

$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$　　$\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}+C$

$\displaystyle\int e^x\,dx=e^x+C$　　$\displaystyle\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\log a}+C$

第15講 PART2 確認問題

次の不定積分を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

ただし，C は積分定数とする。

1 $\displaystyle\int(\sin x+3\cos x)dx=$ ア $+C$

① $\sin x-3\cos x$　② $-\sin x+3\cos x$

③ $\cos x-3\sin x$　④ $-\cos x+3\sin x$

2 $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x+1}{\cos^2 x}dx=$ イ $+C$

① $\sin x-\cos x$　② $\sin x+\tan x$

③ $\sin x-\tan x$　④ $\cos x+\tan x$

3 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\cos x\tan x}=$ ウ $+C$

① $\tan x$　② $\dfrac{1}{\tan x}$

③ $-\dfrac{1}{\tan x}$　④ $\dfrac{1}{\sin x\cos x}$

4 $\displaystyle\int(3e^x+3^x)dx=$ エ $+C$

① e^x+3^x　② $3e^x+3^x$

③ $3e^x+3^x\log 3$　④ $3e^x+\dfrac{3^x}{\log 3}$

PART2 三角関数・指数関数の不定積分

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(1-\tan x)\cos x\,dx$

(2) $\displaystyle\int\tan^2 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\tan^2 x}dx$

(4) $\displaystyle\int(5e^x-2^x\log 2)dx$

[解答]

(1) $$\int(1-\tan x)\cos x\,dx=\int\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos x\,dx$$
$$=\int(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x+C$$

(2) $$\int\tan^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\tan x-x+C$$

(3) $$\int\frac{1}{\tan^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$$
$$=-\frac{1}{\tan x}-x+C$$

(4) $$\int(5e^x-2^x\log 2)dx=5e^x-\frac{2^x\log 2}{\log 2}+C=5e^x-2^x+C$$

第15講 PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：④

[解説]

$$\int(\sin x+3\cos x)dx=\int\sin x dx+3\int\cos x dx$$
$$=-\cos x+3\sin x+C \quad \text{[A]}$$

[A] $\int\sin x dx=-\cos x+C$
$\int\cos x dx=\sin x+C$

2

[正解] イ：②

[解説]

$$\int\frac{\cos^3 x+1}{\cos^2 x}dx=\int\left(\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$
$$=\int\cos x dx+\int\frac{1}{\cos^2 x}dx \quad \text{[B]}$$
$$=\sin x+\tan x+C$$

[B] $\int\cos x dx=\sin x+C$
$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$

3

[正解] ウ：③

[解説]

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos x\tan x}=\int\frac{dx}{\sin x\cos x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}} \quad \text{[C]}$$
$$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}$$
$$=-\frac{1}{\tan x}+C \quad \text{[D]}$$

[C] $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

[D] $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}+C$

4

[正解] エ：④

[解説]

$$\int(3e^x+3^x)dx=3\int e^x dx+\int 3^x dx$$
$$=3e^x+\frac{3^x}{\log 3}+C \quad \text{[E]}$$

[E] $\int e^x dx=e^x+C$
$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$